کارگاه آموزشی مدلسازی در آبیاری و زهکشی
۲۴ آذر ماه ۱۳۸۴

ساختار مدل‌های ریاضی و کاربرد آنها در سیستم‌های آب زیرزمینی

مهدی میراب‌زاده[۱] ، مهدی قبادی‌نیا [۲]

چکیده

مدل توصیف یا قیاسی است که جهت درک بهتر پدیده‌هایی که امکان دیدن آنها وجود ندارد استفاده می‌شود. مدل فرآیند یا سیستمی است که فرآیند یا سیستم دیگری را نمایش می‌دهد بطوریکه می‌توان در زمانهای متناظر بین این دو ارتباط‌هایی دقیق و مشخص برقرار کرد. به عبارت دیگر یک مدل، خواص مکانی و زمانی یک سیستم یا بخشهایی از آن را به صورت فیزیکی (واقعی) و یا ریاضی (انتزاعی) شبیه‌سازی می‌کند. هدف از مدل یافتن تصویر و بازنمودی است که به سادگی نمایانگر حقایق و پدیده‌ها باشد. مدل ریاضی توصیف کننده رفتار یک سیستم به زبان ریاضی می‌باشد. مدل‌های ریاضی دارای کاربردهای فراوانی بخصوص در علوم طبیعی و نظام مهندسی می‌باشند. در این مقاله ابتدا به بررسی ساختار مدل‌های ریاضی و تطبیق آنها با یک سیستم پرداخته می‌شود و سپس جهت آشنایی بیشتر به تهیه مدلی جهت سیستم آبهای زیرزمینی اشاره می‌گردد.

۱. مقدمه

امروزه اصطلاح مدل برای همگان مفهومی آشناست و کاربرد آن در علوم و فنون مختلف بسیار متداول است. عمومیت یافتن مدل در علوم و فنون بویژه در چند دهه اخیر از آنجا ناشی می‌شود که در علوم جدید و نگرش نوین علوم، هدف شناخت مطلق پدیده‌ها نیست بلکه هدف یافتن تصویر و بازنمودی است که به سادگی نمایانگر حقایق و پدیده‌ها باشد و مفهوم مدل به تنهایی این نقطه نظر اساسی را در بر می‌گیرد. مفهوم مدل آنچنان تعمیم یافته است که برخی به این گمان رسیده‌اند، در علوم و فیزیک قوانین و اصول مطلق وجود ندارد و هرچه هست مدل است.

۱و ۲ - به ترتیب دانشیار و دانشجوی دکتری گروه مهندسی آبیاری و آبادانی دانشگاه تهران

از نظر تاریخی روش مدل از زمانی مطرح بوده که انسان خواسته است سیستمهای حقیقی کم و بیش پیچیده را شناسایی و بررسی کند و یا با پیش‌بینی رفتار آنها به بهره‌برداری بهتر و بیشتر از آنها بپردازد. به همین جهت روش مدل در زمینه‌های مختلف فعالیتهای علمی مانند علوم طبیعی، علوم انسانی، علوم اقتصادی و غیره با هدف شناخت نسبی حقایق به کار گرفته شده و کاربرد آن در مدیریت بهره‌برداری از سیستمهای طبیعی و صنعتی توسعه یافته است.

۲.مفهوم مدل، هدف، روش و نظریه مدل‌ها

عبارت مدل به صورت مصطلح آن، بسته به مورد، با مفاهیم متفاوتی به کار برده می‌شود. در پاره‌ای موارد مدل به الگو یا نمونه‌ای اطلاق می‌گردد که تولید و یا ایجاد دوباره آن پیشنهاد و توصیه می‌شود و یا رد و نفی می‌گردد. در موارد دیگر مدل به مفهوم نمایش ایده‌آل یک پدیده حقیقی(مدل‌های ریاضی) و یا نمایش مادی یک پدیده توسط پدیده دیگر(مدل‌های فیزیکی) است که هدف آن روشن و نمایان ساختن عملکرد و رفتار یک پدیده حقیقی تحت شرایط معین داده شده می‌باشد.

عبارت مدل و عمومیت یافتن کاربرد آن در علوم و فنون مختلف بی‌تردید از اینجا ناشی می‌شود که این اصطلاح به تنهایی نقطه نظر علوم نوین و برداشت نوین علوم را در بر می‌گیرد. در حقیقت علوم جدید و نگرش جدید علوم، شناخت مطلق حقایق را هدف قرار نمی‌دهد، بلکه درصدد یافتن صوری است که به آسانی و به طور نسبی نمایشگر حقایق باشد.

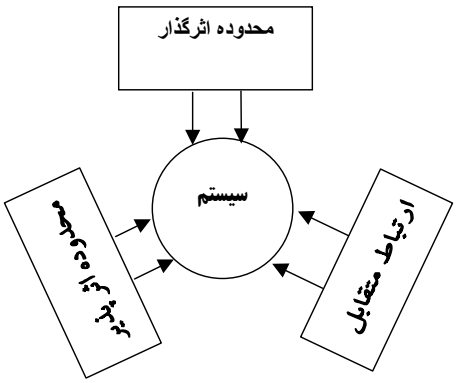
کلمه مدل از نظر لغوی و به معنی متداول آن، مفهوم نمایش و کاربرد آن را توامان در بر می‌گیرد. اما تعریف دقیق آن در نظریه مدل‌ها همان فلسفه بیان علوم است که هدف را نمایش حقایق و نه شناخت مطلق آن می‌داند. با این دیدگاه نظریه مدل بر پایه دو مجموعه بزرگ با طبیعتی متفاوت، شامل مجموعه «موضوع مدل» و مجموعه «مدل» بنا می‌گردد.

۲- ۱. موضوع مدل

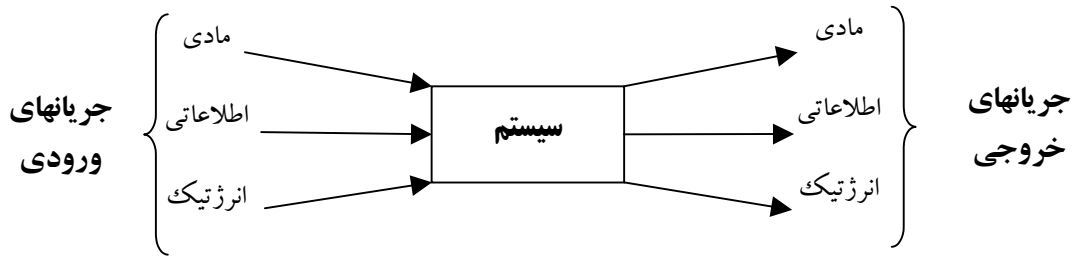
موضوع مدل بخشی از حقیقت است که مشخصات یک سیستم را دارا می‌باشد.

- وجودی با فردیتی بطور نسبی قابل شناخت و پاینده در زمان و مکان
- دارای ساختاری است که چگونگی عملکرد داخلی آن را روشن می‌سازد
- دارای ارتباطی است دینامیک با محیط پیرامون خود که قابل مشاهده و اندازه‌گیری در زمان و مکان می‌باشد. به این معنی که سیستم از محیط پیرامون خود با فرآیندهای معینی که ورودی‌های سیستم را مشخص می‌کند، اثر می‌پذیرد (پیرامون اثرگذار). سیستم در داخل خود تغییراتی بصورتهای مختلف به ورودیها تحمیل می‌کند که بستگی به ساختار و روابط بین عناصر تشکیل دهنده سیستم دارد (شکل ۱).

سیستم با فرآیندهای معینی به محیط پیرامون خود (پیرامون اثرپذیر) اثراتی باز می‌گرداند که خروجی‌ها (یا پاسخهای) سیستم نامیده می‌شود. ورودی‌ها و خروجی سیستم می‌تواند از نوع ماده، انرژی و یا اطلاعات باشد (شکل ۲).



شکل ۱. حدود سیستم



شکل ۲. ورودی و خروجی‌های سیستم

۲-۲. مدل

از تعریف «موضوع مدل» چنین استنباط می‌گردد که مفهوم «مدل» از مفهوم سیستم تفکیک‌ناپذیر است. در حقیقت یک مدل، یک سیستم معرف یا نمایشگر یک سیستم حقیقی «موضوع مدل» است از نظر تاریخی «روش مدل» از زمانی مطرح بوده است که انسان خواسته است به بررسی سیستم‌های حقیقی کم و بیش پیچیده، به منظور درک، شناخت و بهره‌برداری بهتر و بیشتر از آنها بپردازد. به همین جهت در ابتدا، روش مدل در زمینه‌های مختلف فعالیتهای علمی (علوم طبیعی، علوم انسانی، علوم اجتماعی و اقتصادی و ...) که هدف آنها شناخت نسبی حقایق است، به کار برده شده است، و سپس در عملکرد سیستمهای مصنوعی تکنولوژی و مدیریت آنها که ضرورت اعمال یک سیستم فرمان و یا دخالت‌های انسانی را ایجاب می‌کند در آخرین حد خود توسعه یافته و مورد استفاده قرار گرفته است.

۳. کاربرد مدل در آبشناسی

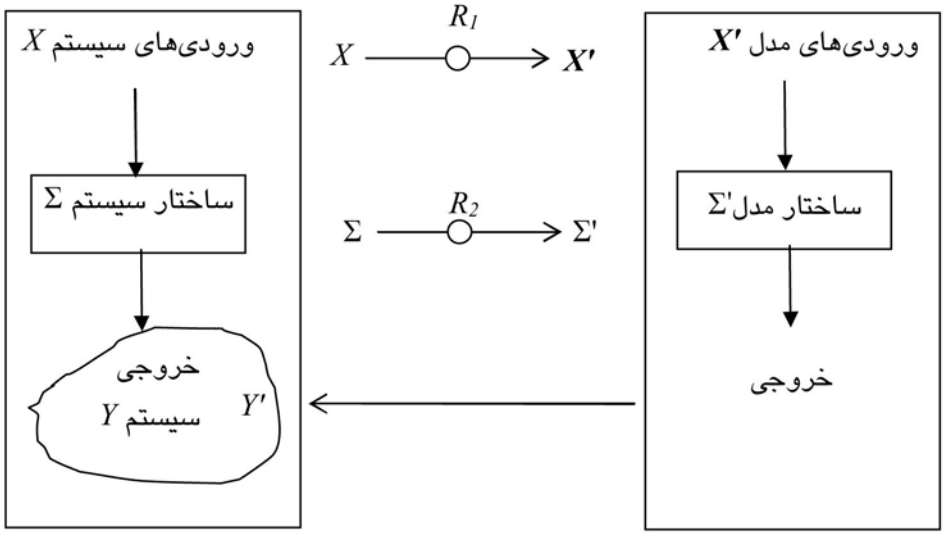
در علوم آبشناسی به مفهوم وسیع خود، مربوط به تجزیه و تحلیل فرآیند گردش آب در طبیعت می‌گردد. مفهوم سیستم همیشه بطور ضمنی در تمام مطالعات به کار برده شده است. ولی کاربرد صریح و آگاهانه آن مربوط به زمانی می‌گردد که مفهوم «هیدروگرام واحد» در هیدرولوژی وارد گردیده است. ساختمان و تکمیل این مدل سالیان سال مورد توجه و نظر متخصصین آبشناسی بوده و هنوز هم کم و بیش عده‌ای از متخصصین به آن می‌پردازند. بدون شک این مدل سهم به سزایی در شکل دادن و تثبیت مفاهیم و اصطلاحات متداول در مدل‌های آبشناسی داشته است، بطوریکه از دهه ۶۰ میلادی به این طرف در تمام تألیفات هیدرولوژی، اصطلاحات و عبارتهای مشترکی برای مفاهیم اساسی به کار برده شده است. با وجود این روشهای ساختمان مدل تا سال ۱۹۶۴ میلادی عملاً محدود به وسایل محاسباتی سنتی و تکنیکهای قیاسی یا آنالوژی بوده است و پیشرفت‌های زیادی در زمینه ساختمانهای مدل‌های صورت پذیرفته است. از این تاریخ توسعه کاربرد کامپیوتر در زمینه‌های مختلف و عرضه کامپیوترهایی با سرعت و دقت عمل و با ظرافت حافظه زیاد از یک طرف و پیشرفت آنالیز عددی از طرف دیگر موجب توسعه کاربرد مدل‌های ریاضی و عددی در زمینه‌های مختلف آبشناسی، بویژه در بررسی و شناخت، بهره‌برداری و مدیریت سیستم‌های آب سطحی و زیرزمینی گردیده است بطوریکه موضوع بسیاری از همایش‌های علمی و فنی، کنفرانسها، سمینارها و ... منحصراً به مدل‌های ریاضی تخصیص یافته است.

۴- ساختار عمومی یک مدل

گردش عملیات مدل از داده‌های ورودی آن شروع و به نتایج خروجی ختم می‌گردد. داده‌های ورودی مدل مشخصاتی از مدل است که از مشخصات موضوعش که به طور مستقیم قابل مشاهده و شناخت است نتیجه می‌گردد.

مدل از نقطه ورود داده‌ها، مسیر خود را طی زمان تعقیب می‌کند تا جاییکه نتایج خروجی مرتبط با ورودی‌هایش را فراهم سازد. از نتایج خروجی مدل است که مشخصات نظیر همتای موضوعش استنباط می‌گردد و بدینگونه شناختی از عملکرد و رفتار کم و بیش ناشناخته موضوع از نتایج مدل حاصل می‌گردد. بدینگونه می‌توان یک مدل را چون یک سیستم نمایشگر یک سیستم حقیقی «موضوع مدل» تعریف کرد که بین ورودی‌ها، حالتها و خروجی‌های این دو سیستم سه نوع ارتباط برقرار می‌باشد.

در شکل ۳ جهت پیکانها بین موضوع و مدل جهت مقابله بین این دو را نشان می‌دهد. بدینگونه که به هر ورودی «موضوع»، X، یک ورودی «مدل» ، X'، و به هر خروجی Y' مدل یک خروجی متناظر با Y موضوع نتیجه می‌گردد.



شکل ۳. ارتباط بین مدل و موضوع

بدیهی است که مدل نمی‌تواند تمام خصوصیات واقعی موضوع را نمایش دهد زیرا در اینصورت مدل باید از هر نقطه نظر با موضوع خود یکسان باشد که در اینصورت دیگر نمی‌تواند مدلی از موضوع باشد بلکه خود همان موضوع است.

بنابراین وقتی مدلی از یک موضوع مد نظر است باید خصوصیاتی از موضوع که باید و می‌تواند در مدل نمایش داده شود، مشخص گردد. انتخاب این خصوصیات دلخواه نیست هر چند که بسته به مورد می‌تواند بصورتهای مختلف و با ترکیب‌های متفاوت انجام پذیرد.

انتخاب پاره‌ای از خصوصیات در بین خصوصیات بی‌شمار موضوع برای نمایش «مدل» تجریدی بودن مدل را روشن می‌سازد، بطوریکه هیچ مدلی نمی‌تواند نمایشگر تمامیت موضوع خود باشد. در نتیجه وجود خطا و تقریب جزء جداناپذیر مدل است. در انتخاب مشخصاتی از موضوع که باید در مدل به کار برده و نمایش داده شود قبل از هر چیز لازم است کاربرد عملی نتایج مدل مد نظر قرار گیرد. حتی در تحقیقات پایه نیز هدف آن شناخت واقعیت پدیده‌ها می‌باشد جنبه کاربرد عملی نتایج تحقیقات به این صورت ظاهر می‌شود که نتیجه هر تحقیق در تحقیقات بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

ویژگی کاربرد عملی نتایج مدل، مشخصاتی از موضوع را که باید در مدل نمایش داده شود روشن می‌سازد. این مشخصات طوری انتخاب می‌گردند که نتایج ناشی از عملکرد مدل در تصمیم‌گیری عملی روی موضوع موثر و تعیین کننده باشد.

آنچه در مدل دارای اهمیت اساسی است نتایج کاربردی و عملی است که فراهم می‌سازد و نتایج نظری که به برقراری قوانین و روابط عمومی علوم منجر می‌شود. به عبارت دیگر هدف اصلی روش مدل پرده برداشتن از روی حقایق به منظور توصیف و طبقه‌بندی بهتر و شناخت آنها نمی‌باشد بلکه رفتار یک «موضوع» حقیقی و نمایش هرچه بهتر و دقیق‌تر آن را مد نظر قرار می‌دهد بدون اینکه خود را مقید به بررسی قوانینی کند که امکان شناخت بهتر واقعیات و حقایق را ممکن می‌سازد.

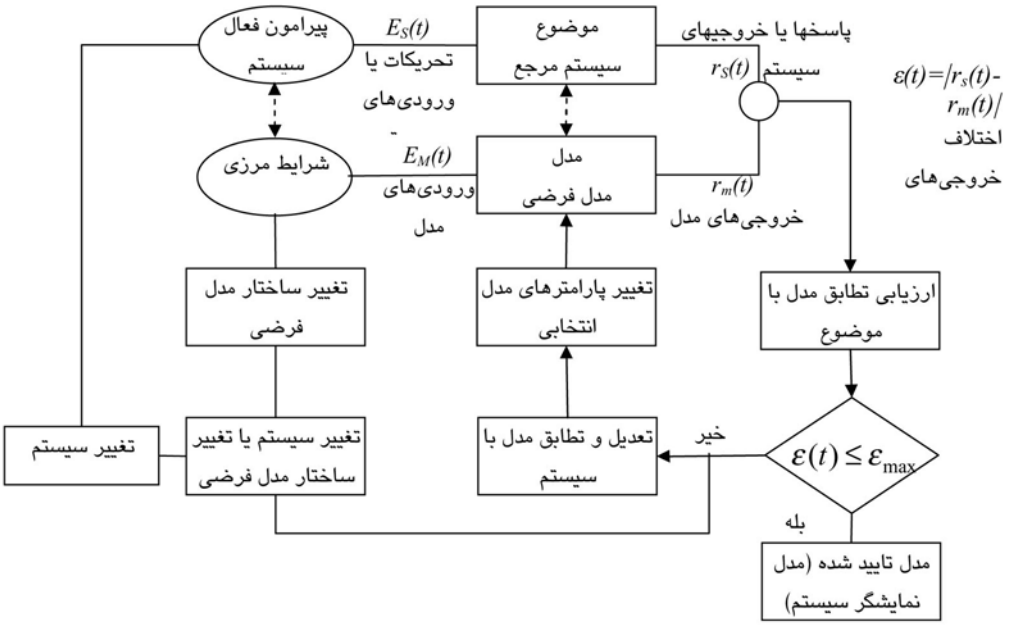
۵. مدل ریاضی

مدل ریاضی توصیف کننده رفتار یک سیستم به زبان ریاضی است یا فرآیند ایجاد نمایش ریاضی پدیده‌ها برای فهم بهتر پدیده‌ها است. مدل‌های ریاضی به موازات سایر روشهای کلاسیک (مدل‌های تشابه الکتریکی)، این امکان را می‌دهند که با استفاده از مجموعه داده‌ها و اطلاعات مختلفی که در روی زمین اندازه‌گیری و جمع‌آوری می‌شود شمایی از سیستم مورد بررسی را بدست آورد که تا حد امکان نمایشگر محیط طبیعی باشد. عملیات مربوط به تهیه و تنظیم و تطابق مدل منجر به تعیین یک شمای ریاضی نمایشگر سیستم می‌گردد. مدل‌های ریاضی را می‌توان در گروه‌های زیر طبقه‌بندی نمود

- مدل‌های خطی و غیر خطی
- مدل‌های قطعی و احتمالی
- مدل‌های ایستا و پویا
- پارامترهای توده‌ای و توزیعی

۶. اساس تهیه یک مدل ریاضی نمایشگر یک سیستم حقیقی

برای تفهیم و تصریح دو مفهوم «موضوع» و «مدل» نحوه عملکرد و رفتار هر یک از این دو سیستم در کاربرد روش مدل مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم. در شکل ۴ اساس ساختمان یک مدل ریاضی نمایشگر یک سیستم «موضوع مدل» را نشان می‌دهد.

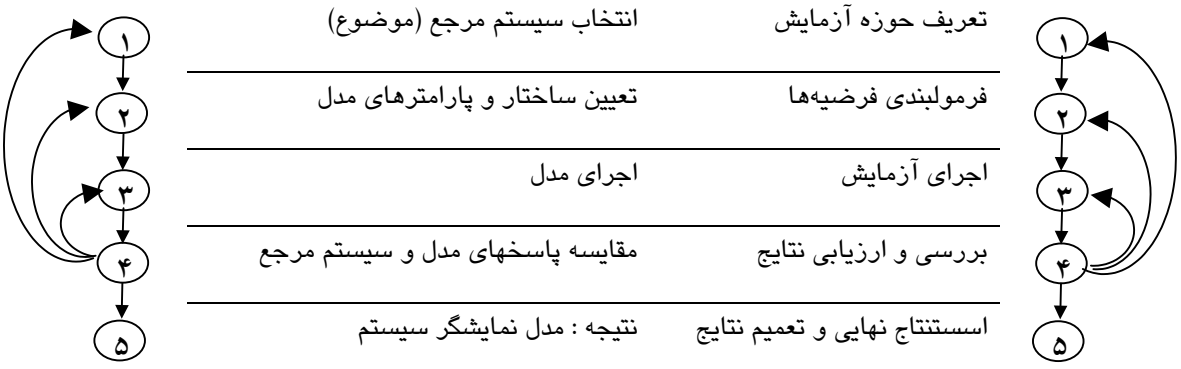


شکل ۴. اساس ساختمان یک مدل ریاضی

اساس روش مدل می‌تواند مبتنی بر مقایسه بین خروجی‌های مدل ، Y'، و خروجی‌های موضوع ،Y، تحت شرایط ورودی‌های یکسان و معادل می‌باشد. بدیهی است که هدف تصریح و روشن ساختن ساختار مدل و تطابق آن با ساختار «موضوع» با بدست آوردن جوابهایی حدوداً یکسان و یا حداقل با اختلاف قابل قبول (مثلاً کوچکتر در یک اختلاف ماکزیمم ε_{max}) حاصل می‌گردد. این عمل تطابق یا واسنجی مدل با «موضوع» قدم به قدم با تغییر در پارامترهای مدل، در یک دامنه تغییرات قابل قبول، از یک طرف و با انتخاب سیستم‌های مرجع و احیاناً تغییر در ساختار مدل فرضی اولیه، انجام می‌پذیرد. بدیهی است که نتایج حاصل از مقایسه خروجی‌ها در هر قدم بصورت عمومی می‌تواند راهنمای اعمال تغییرات در قدم بعدی باشد. این طرز عمل مبتنی بر یک روند حلقوی و اصلاح و تعدیل قدم به قدم می‌باشد. با طرز عمل در روش تجربی کلاسیک قابل مقایسه است.

۷. مقایسه روش مدل با روش تجربی

در شکل ۵ تشابه بین مراحل مختلف دو روش مدل و تجربی ارائه گردیده است.



شکل ۵. مقایسه روش مدل و روش تجربی

با وجود روند مشابه عملیات در دو روش، اختلاف اساسی آنها نحوه نگرش به موضوع مورد بررسی است. روش مدل دیدگاه جدیدی را مطرح می‌کند که امکان دسترسی عملی به شناخت و حل مسائل مربوط به سیستم‌های پیچیده را بدست می‌دهد. در روش تجربی، در وهله اول، هدف تجزیه و تحلیل یک واقعیت به منظور شناخت و روشن ساختن طبیعت و ساختار دقیق این واقعیت است، هدفی که هنوز هم هدف اصلی علوم را تشکیل می‌دهد و در مرحله دوم هدف روش تجربی متمایز و جدا کردن پدیده‌های اصلی است که می‌توانند هر چه عمومی‌تر و کلی‌تر بصورت قوانین و روابط ریاضی بیان گردند. اما از دیدگاه روش مدل قبل از هر چیز شناخت رفتار یک موضوع ،یک سیستم، یک واقعیت و نمایش هر چه درست‌تر آن مورد نظر است. بدون اینکه خود را مقید به بررسی و شناخت ساختارها و قوانین اصلی نماید که امکان شناخت بهتر

واقعیت را ممکن می‌سازد بدینگونه هدف اصلی مدل پرده برداشتن از روی حقایق به منظور توصیف و طبقه‌بندی بهتر آنها نمی‌باشد بلکه واقعیت‌ها را نظیر سیستم‌هایی در نظر می‌گیرد که در مقابل پاره‌ای محرکها، بویژه محرکهایی که به آسانی و با شدت رفتار سیستم را تحت تأثیر قرار می‌دهند، بتواند پاسخ‌هایی مشخص را بروز دهد. پیچیدگی یک «موضوع» در روش مدل مربوط به پیچیدگی ساختار آن است که باید با انجام آزمایشها و تجزیه و تحلیل نتایج آن شناخته شود. بدینگونه کاربرد روش مدل در مورد سیستم‌هایی با ساختار و آناتومی پیچیده ولی با رفتاری ساده بسیار جالب و موثر است. سیستم‌های کم و بیش پیچیده‌ای که دارای رفتار ساده «خطی» می‌باشند که می‌توان برای نمایش و معرفی آنها از مدل‌های ساده «خطی» استفاده کرد. به عنوان مثال در سیستم‌های هیدرولوژی در موارد زیادی مشاهده می‌شود که بین عوامل و محرکهای هواشناسی مانند باران، درجه حرارت و پاره‌ای از پاسخ‌های سیستم مانند بده جریان یک رابطه کم و بیش خطی وجود دارد در حالیکه ساختار حوزه آبریز و سیستم مرتبط به آن که منجر به رفتار آن می‌گردد بسیار پیچیده است. برای مهندسین که عموماً شناخت رفتار یک سیستم، برای دستیابی به پاره‌ای از نتایج عملی و کاربردی، بیشتر مورد توجه است، روش مدل می‌تواند بطور موثر مورد استفاده قرار گیرد.

روش مدل می‌تواند بطور موثر مورد استفاده قرار گیرد و در بسیار از موارد روش مدل تنها روشی است که دستیابی به حل یک مسأله مهندسی با ساختاری پیچیده را، هر چند با دقتی نسبی، امکان پذیر می‌سازد. با وجود این ویژگی‌های روش مدل، نباید پوشیده داشت که این روش بدون اتکا بر نتایج بدست آمده از روشهای تجربی کلاسیک نمی‌تواند عملی باشد در واقع، علوم فیزیک یک مجموع قوانین پایه و اساسی را بدست می‌دهند که بر مبنای آنها مدل‌های مختلف فیزیکی و یا ریاضی ساخته می‌شود، بدیهی است که کلید این قوانین با استفاده از روشهای تجربی بدست آمده‌اند، این چنین است که دست‌آوردهای علوم طبیعی که توصیف و تعریف «موضوع» را بصورتی کم و بیش دقیق امکان‌پذیر می‌سازد، علاوه بر این داده‌ها و اطلاعات مربوط به سیستم‌های طبیعی که از طریق آزمایش و اندازه‌گیری بدست می‌آیند امکان انتخاب پارامترهای ساختاری برای تهیه مدل اولیه(مدل مفهومی) و سپس دستکاری تغییر دادن این پارامترها، جهت واسنجی و تطابق مدل با «موضوع» را بدست می‌دهد.

۸. ضرورت، امکانات و محدودیت‌های کاربرد مدل‌های ریاضی

پیشرفت و توسعه کاربرد مدل‌های ریاضی شدیداً مرتبط به پیشرفت تکنولوژی است. از یک طرف تکنولوژی انسان را به سمت سیستم‌های پیچیده و ایجاد این سیستمها سوق داده است و براساس همین مسأله بوده است که مبانی علم آنالیز سیستم‌ها و به دنبال آن نظریه مدل‌ها پی‌ریزی شده است. از طرف دیگر ساخت کامپیوترهایی با سرعت، دقت و ظرافت حافظه زیاد این امکان را داده است که بتوان سیستم‌های طبیعی یا مصنوعی پیچیده‌ای را با دخالت دادن پارامترها و متغیرهای متعدد و متفاوت توسط مدل‌های ریاضی و عددی نمایش و مورد بررسی و استفاده عملی قرار داد. با وجود این اصطلاحات،

مفاهیم و نحوه انجام عملیات در روش مدل نمی‌تواند به معنی تغییر اساسی در اصول تلقی شود و روش مدل همان محدودیت‌هایی نظری روش‌های تجربی و آزمایشگاهی را به ویژه از نقطه نظرهای زیر دارا می‌باشد

۸-۱. اختلاف اصولی و اساسی بین واقعیت‌ها و نمایش ریاضی آنها

یک مدل نمی‌تواند همان «موضوع» باشد. در حقیقت یک مدل بخشی از یک حقیقت یا واقعیت که توسط رفتار معینی، مشخص می‌گردد و نمایش داده می‌شود. به عبارت دیگر نمی‌توان یک مدل «مطلق» از یک سیستم حقیقی را در اختیار داشت. در واقع بین مدل و موضوع که دو وجود یا دو سیستم متمایز و مختلف می‌باشند تنها تشابهی در رفتار آنها وجود دارد. بعلاوه داده‌ها و اطلاعات گردآوری شده، مربوط به ساختار و عملکرد موضوع که ساختمان مدل بر پایه آن انجام می‌پذیرد هرگز نمی‌تواند جامع و دقیق باشد. در حقیقت خطاهای مختلف اندازه‌گیریها، اثرات ناشی از وجود بعضی محرکهای ناخواسته و گاه پوشیده از نظر آزمایش کننده، موجب ناخالصی و وجود خطاهایی کم و بیش عمده و اجتناب ناپذیر در مجموعه داده‌ها و اطلاعات جمع آوری شده می‌گردد.

۸-۲. نسبت قوانین فیزیکی و محدودیت حوزه اعتبار مدل

هر قانون فیزیکی عموماً در محدوده‌های معینی، تعریف شده و متغیر می‌باشد که حوزه اعتبار آن قانون نامیده می‌شود. برای مدل‌هایی که بر اساس این قوانین ساخته می‌شود، حوزه اعتبار هر مدل از اشتراک حوزه‌های اعتبار قوانینی که در مدل به کار گرفته شده است، نتیجه و به آن محدود می‌گردد این حوزه اعتبار که محدوده کاربرد مدل را معین می‌کند، می‌تواند بدلیل فرضیات ساده کننده‌ای که بطور اختیاری و یا بنا به ضرورت در نظر گرفته می‌شود، باز هم محدودتر گردد.

۹. گامهای بسط مدل و شناخت آن

به طور خلاصه برای مدل کردن یک پدیده باید مراحل زیر را پیمود:

۱- شناخت مساله
۲- بسط مفهومی
۳- جدا کردن مساله به اجزای اساسی
- چه فرآیندهایی را شامل می‌شود؟
- چه رابطه تجربی را شامل می‌شود؟
۴- فرموله کردن مدل و بسط معادلات
۵- کالیبره کردن مدل: حل فرمول‌ها و روابط با استفاده از دستگاه داده‌ها
۶- تصحیح و بازبینی مدل با واقعیت

۷- ارزیابی نتایج
- رد مدل
- تأیید مدل
- اصلاح مدل بر پایه بینش جدید

۱۰.تهیه کاربرد مدل‌های ریاضی در سیستمهای آب زیرزمینی

در سالهای اخیر با توسعه و پیشرفت در ساخت کامپیوترها با ظرفیت، حافظه و سرعت عمل زیاد همراه با پیشرفت آنالیز و محاسبات عددی و ریاضیات کاربردی این امکان را بوجود آمده است، محاسباتی که به دلیل حجم زیاد و یا ضرورت تکرار محاسبات غیر ممکن بود، انجام پذیر گردد و بدینگونه کاربرد مدل‌های ریاضی در شناخت و بررسی پدیده‌های مختلف و حل مسایل پیچیده مهندسی از جمله مسایل مربوط به جریانهای زیرزمینی (آب-نفت-گاز) متداول و توسعه یابد.

مدل ریاضی سیستم‌های آب زیرزمینی در حقیقت یک ابزار محاسباتی قوی است که امکان می‌دهد تحول کمی و کیفی یک سیستم آب زیرزمینی را تحت شرایط مختلف بهره‌برداری و تغییرات در شرایط مرزی پیش‌بینی و مورد ارزیابی قرار دارد. در اینجا پس از بیان ساختار مدل‌های ریاضی سفره‌های آب زیرزمینی، دامنه کاربرد آن در حل مسایل مختلف و مراحل تهیه و تنظیم و تطابق مدل با موضوع (واسنجی) مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱۰-۱. سیستم آب زیرزمینی

یک سیستم آب زیرزمینی فضایی است متخلخل (یا درز و شکاف‌دار)، اشباع از آب که هر نوع حرکت و جریان آب و املاح در آن را می‌توان مستقل از شرایطی در نظر گرفت که در خارج از مرزهای آن وجود دارد. با این تعریف تبادل جریان بین سیستم آب زیرزمینی با سیستمهای مجاور و مرتبط با آن توسط شرایط هیدرولیکی حاکم در روی مرزهایی که سیستم را از محیط‌های پیرامون خود جدا می‌کند، مشخص و دخالت داده می‌شود. بدینگونه (سفره آزاد یا تحت فشار) یک سیستم آب زیرزمینی با مشخصه‌های زیر تعریف می‌شود.

۱- شکل هندسی (گسترش آبخوان در سطح و در عمق)
۲- ضرایب هیدرودینامیک (ضریب ذخیره S و ضریب قابلیت انتقال T)
۳- شرایط مرزی
۴- شرایط تغذیه و برداشت

۱۰-۲. حدود سیستم آب زیرزمینی

حدود یک سیستم آب زیرزمینی توسط شرایط هیدرولیکی آن مشخص می‌شود. با دخالت دادن شرایط هیدرولیکی است که می‌توان جریان در داخل آن را مورد بررسی قرار داد و ارتباط سیستم آب زیرزمینی را با محیط پیرامون خود برقرار ساخت. حدود سیستم‌های آب زیرزمینی شامل سطوح فوقانی و تحتانی و سطح جانبی است که معمولاً آن را نظیر خطی در نظر می‌گیرند که مرز سیستم را مشخص می‌کند.

سطح فوقانی در یک سفره آزاد، همان سطح آزاد آب است که نسبت به زمان متغیر است. برداشت آب، تغذیه، تبخیر از این سطح انجام می‌شود و از این طریق سیستم با محیط پیرامون خود یعنی اتمسفر و آبهای سطحی در ارتباط است. در سفره‌های تحت فشار سطح فوقانی یک سطح غیر قابل نفوذ یا نیمه نفوذپذیر است و در حالت نیمه نفوذپذیر بودن تبادل آب بین سیستم مزبور و سیستمی که بر روی آن قرار گرفته (عموماً یک سفره آزاد) برقرار خواهد بود. سطح تحتانی یک سیستم آب زیرزمینی نیز می‌تواند سطح غیرقابل نفوذ یا نیمه نفوذپذیر باشد.

۱۰-۳. قوانین حاکم بر سیستم‌های آب زیرزمینی

جریان آب در داخل یک سیستم آب زیرزمینی، از معادله اساسی هیدرودینامیک محیط‌های متخلخل تبعیت می‌کند و از ترکیب معادله پیوستگی و معادله تعمیمی دارسی نتیجه می‌شود.

الف) قانون تعمیمی دارسی

معادله تعمیمی دارسی که بیانگر اصل بقاء انرژی است به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$V = -K\ grad\ h \qquad (۱)$$

که در آن، V بردار سرعت، h پتانسیل هیدرودینامیک، K تانسور سرعت نفوذ دارسی یا آبگذری می‌باشند.

ب) قانون پیوستگی جریان

معادله پیوستگی اصل بقا جرم را بیان می‌کند که در سیستمهای آب زیرزمینی می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$diV(eV) = -S\frac{\partial h}{\partial t} - q \qquad (۲)$$

که در آن، e ضخامت لایه آبده، S ضریب ذخیره، q بده تغذیه ($q>۰$) یا برداشت($q<۰$) از واحد حجم محیط متخلخل

۱۰-۴. حل عددی معادلات جریان و انتشار املاح

استفاده از مدارهای ریاضی در بررسی جریان آب زیرزمینی با شرایط مرزی و شرایط اولیه معلوم منجر به حل عددی معادلات مشتقات نسبی جریان در سیستمهای آب زیرزمینی می‌شود که در نتیجه اندازه پتانسیل هیدرودینامیک و یا ارتفاع پیزومتری h در داخل سیستم آب زیرزمینی بدست می‌آید.

معادله اساسی جریان در یک جریان دو بعدی در صورتیکه محورهای مختصات موازی با محورهای اصلی تانسور T (ضریب قابلیت انتقال) در نظر گرفته شوند به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T_{xx}\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T_{yy}\frac{\partial h}{\partial y}\right)=S\frac{\partial h}{\partial t}+q \qquad (۳)$$

که در آن q جمع جبری بده‌های تغذیه و برداشت و S ضریب ذخیره است.

در مدل انتقال پخشیدگی املاح حل همزمان معادله اساسی جریان با معادله انتقال پخشیدگی ضرورت پیدا می‌کند که به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial(Ce)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(eD_{ij}\frac{\partial C}{\partial x_i}\right)-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(ecV_i\right)-\frac{۱}{n_e}C^*q \qquad (۴)$$

C^* غلظت متوسط بده‌های تغذیه و تخلیه، n_e تخلخل موثر، D_{ij} مولفه‌های تانسور پخشیدگی، V_i سرعت حقیقی، C غلظت شیمیایی املاح، e ضخامت لایه می‌باشد.

در مدل‌های ریاضی سیستمهای آب زیرزمینی برای حل عددی معادلات مشتقات جزئی روشهای گوناگونی به کار گرفته می‌شود که متداولترین آنها روش تفاضلهای محدود و روش اجزاء محدود است. در این روشها حوزه مورد بررسی به اجزاء کوچک شبکه‌بندی و معادله جریان در هر جزء توسط یک معادله خطی جانشین می‌شود. اگر N تعداد خانه‌های شبکه‌بندی باشد یک دستگاه معادلات خطی شامل N معادله با N مجهول بدست می‌آید. که حل آن اندازه پتانسیل هیدرودینامیک h و اندازه غلظت C (در مدل‌های کیفی) را در N نقطه از سیستم مورد بررسی بدست می‌دهد.

۱۰-۵. مراحل مختلف تهیه مدل ریاضی سیستم‌های آب زیرزمینی

تهیه یک مدل ریاضی شامل مراحل زیر است:

۱- شناخت و تعیین مشخصات سیستم مورد بررسی

۲- واسنجی یا همانندسازی مدل با سیستم مرجع

۳- تأیید درستی عملکرد مدل

۴- بهره‌برداری از مدل

در این طرح کلی هرچند مراحل مختلف بطور متوالی دنبال یکدیگر قرار دارند ولی عملیات مختلف در تهیه مدل، در مسیرهای حلقوی و با یک روند تکرارهای پی‌درپی انجام می‌گیرد و این یکی از مشخصه‌های روش مدل است.

مرحله اول – شناخت و تعیین مشخصات سیستم مورد بررسی

این مرحله شامل تجزیه و تحلیل داده‌ها و اطلاعات، توصیف و تشریح سیستم آب زیرزمینی است و به منظور دستیابی به یک مدل مفهومی و مناسب از سیستم انجام می‌شود. در این مرحله حدود، اصول و فرضیات قابل قبول که می‌توانند در آزمونهای مختلف در مرحله واسنجی مورد استفاده قرار گیرند، تعیین می‌گردد. بدیهی است، پذیرش این اصول و فرضیات و احیاناً تجدیدنظر در آنها از تجزیه و تحلیل آزمونهای مختلف در مرحله واسنجی مدل حاصل می‌شود. شایان ذکر است شناخت هرچه بیشتر و بهتر سیستم آب زیرزمینی سبب می‌شود فرضیات و اصولی مد نظر قرار گیرند که با فرآیند حاکم بر سیستم تطابق بیشتری دارند و در نتیجه مرحله واسنجی مدل با سهولت بیشتری انجام خواهد گرفت. بطور خلاصه این مرحله در نهایت منجر به تهیه یک مدل مفهومی از سیستم آب زیرزمینی و انتخاب یک یا چند سیستم مرجع می‌شود که در مرحله واسنجی و همانندسازی برای دستیابی به یک مدل ریاضی نمایانگر سیستم آب زیرزمینی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

مرحله دوم – واسنجی یا همانندسازی مدل با سیستم مرجع

در این مرحله بر اساس سیستم مرجع انتخابی اندازه‌های متناظر با متغیرها و پارامترهای ساختاری تعیین شده در مرحله قبل تهیه شده و به عنوان داده‌های ورودی به مدل ریاضی که در برگیرنده روابط حاکم بر عملکرد سیستم است، داده می‌شود. سپس تلاش می‌شود با تغییر در پارامترهای سیستم و احیاناً در فرضیات و داده‌های مربوط به شرایط مرزی، اختلاف بین جوابهای محاسباتی مدل و اطلاعات مشاهده شده سیستم مرجع به حداقل ممکن و حد قابل قبول برسد.

بطوریکه ملاحظه می‌شود انجام این مرحله ایجاب می‌کند مجموعه اطلاعات مشاهده برای متغیرها و پارامترهای ساختاری با دقت کافی موجود باشد همچنین لازم است رفتارهای سیستم آب زیرزمینی به عنوان رفتارهای مرجع بخوبی شناسایی شده تا در همانندسازی مدل مورد استفاده قرار گیرند. انتخاب رفتار مرجع مسأله‌ای بسیار حساس و دقیق است و حتی با وجود دستیابی به سیستم‌های مرجع شناخته شده همانندسازی یا واسنجی دقیق‌ترین و حساس‌ترین مرحله در کاربرد روش مدل است.

مرحله سوم- تأیید درستی عملکرد مدل

برای تکمیل مراحل قبلی و به منظور دسترسی به مدل نمایشگر سیستم آب زیرزمینی ضروری است، رفتار مدل برای سیستمهای مرجع دیگر که از تجزیه و تحلیل اطلاعات سیستم آب زیرزمینی بدست آمده است مورد آزمون و وارسی قرار گیرد. وارسی مدل به منظور اطمینان از تطابق کافی مدل با سیستم آب زیرزمینی است چرا که واسنجی و عملیات همانندسازی تنها در مورد یک سیستم مرجع انجام گرفته است

بنابراین نتایج حاصل بطور نسبی قابل قبول است در حالیکه مدل نمایشگر سیستم باید برای حالتهای مختلف، و سیستمهای مرجع متفاوت تطابق لازم را داشته باشد در صورت عدم تطابق مدل با سایر سیستمهای مرجع هر چند واسنجی ظاهراً قابل قبول باشد لازم است با برگشت به مرحله تشریح و توصیف سیستم آب زیرزمینی و احیاناً تهیه داده‌های تکمیلی، عملیات را ادامه داد.

مرحله چهارم- بهره‌برداری مدل

پس از تهیه مدل شناخت، یعنی یک مدل نمایشگر سیستم آب زیرزمینی مورد نظر، مرحله نهایی که بهره‌بردای از مدل است فرا می‌رسد، که هدف اصلی مدل است و سودمندی آن را آشکار می‌سازد. در این مرحله بر اساس شرایط و فرضیاتی که برای آینده در نظر گرفته می‌شود داده‌های ورودی مدل تنظیم می‌گردند. پس از اجرای مدل نمایشگر سیستم اطلاعات خروجی که معرف رفتار آتی سیستم آب زیرزمینی است مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد. بنابراین می‌توان برای حالتهای مختلف بهره‌برداری و فرضیات مختلف رفتار سیستم را در زمان و مکان مورد بررسی و ارزیابی قرار داد و در نهایت به مناسب‌ترین برنامه‌ریزی بهره‌برداری از سیستم با توجه به اهداف مورد نظر دست پیدا کرد.

۱۰-۶. کیفیت مدل

لازم است کیفیت مدل با مفاهیمی ارزیابی شود که بتوان آنها را بصورت کمی تعریف کرد چنین کمیت‌هایی نشان می‌دهد، تا چه اندازه توانسته‌ایم در مرحله واسنجی مدلی بسازیم که همانند سیستم مرجع باشد. در زیر تعدادی از این پارامترها که بیشتر مبتنی بر انحراف بین خروجی‌های مدل و اطلاعات مشاهده‌ای سیستم مرجع است ارائه گردیده است.

حداکثر خطا (*Maximum erorr*):

$$ME = \max\left\{\left|P_i - O_i\right|\right\}_{i=1}^{n} \qquad (۵)$$

ضریب باقیمانده جرم (*Coefficient of residual mass*):

$$CRM = \frac{\sum_{i=1}^{n} O_i - \sum_{i=1}^{n} P_i}{\sum_{i=1}^{n} O_i} \qquad (۶)$$

مجذور میانگین مربعات خطا یا انحراف معیار (*Root mean square error*):

$$RMSE = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(P_i - O_i\right)^2}{n}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{100}{\overline{O}}\right] \qquad (۷)$$

ضریب تعیین (*Coefficient of determination*):

$$CD = \frac{\sum_{i=1}^{n}(O_i - \bar{o})^2}{\sum_{i=1}^{n}(P_i - \bar{o})^2} \qquad (۸)$$

کارایی مدل (*Modeling efficiency*):

$$EF = \frac{\sum_{i=1}^{n}(O_i - \bar{o})^2 - \sum_{i=1}^{n}(P_i - \bar{o})^2}{\sum_{i=1}^{n}(O_i - \bar{o})^2} \qquad (۹)$$

در روابط فوق:

O مقدار مشاهده شده، $\bar{o}$ مقدار میانگین مشاهدات، P مقدار پیش‌بینی شده، n تعداد مقادیر می‌باشند.

بهترین پیش‌بینی‌ها زمانی رخ می‌دهد که ME، $RMSE$ و CRM به صفر میل کند و CD و EF به یک میل کند.

۱۰-۷. حساسیت مدل

وقتی با یک تحریک معلوم، اندازه و توزیع هر یک از پارامترهای ساختاری سیستم را در روی مدل تغییر دهیم انتظار می‌رود، جواب مدل تغییر کند. درجه و شدت این تغییرات حساسیت سیستم را نسبت به پارامتر مورد نظر مشخص می‌کند. حساسیت مدل به آسانی در دسترس است و می‌تواند بصورت ریاضی توسط توابع حساسیت مشخص شود. این توابع مبین اثر تغییر یک پارامتر در روی جواب مدل است. نظریه توابع حساسیت در زمینه سیستم‌های فرمان خودکار توسعه و پیشرفت زیادی داشته است در مورد مدل‌های سیستم‌های آب زیرزمینی ضروری است این نظریه بسط تعمیق یابد با وجود این، فرآیند همانندسازی با روش آزمون و خطا بطور ضمنی برآورد خوبی از حساسیت پارامترهای مختلف را بدست می‌دهد و این خود یک نتیجه مهم از این مرحله مطالعاتی ساختمان مدل است.

۱۱. نتیجه‌گیری

مراحل مختلف، تجزیه و تحلیل داده‌ها، واسنجی و تأیید درستی عملکرد مدل منجر به نمایش سیستم آب زیرزمینی بصورت یک سیستم منسجم و بطورنسبی همانند سیستم طبیعی می‌شود که آن را مدل شناخت می‌نامند. نتایج حاصل از این مدل می‌تواند طرحهای مطالعاتی را که برای شناخت بهتر و بیشتر سیستم آب زیرزمینی برنامه‌ریزی می‌شود، در جهت مناسب و مطلوب هدایت کند.

در حقیقت مدل شناخت نه تنها کمبود اطلاعات و داده‌های سیستم یعنی پارامترهای ساختاری و متغیرها را مشخص می‌کند، بلکه اهمیت نسبی هر یک از آنها در نمایش رفتار سیستم را روشن می‌سازد.

مدل پس از مرحله واسنجی امکان پیش‌بینی تحول سیستم در زمان و مکان را میسر می‌سازد. از این دیدگاه مدل یک خط ارتباطی بین عالم و مهندس که اشتغال فکر او حل مسایل عملی است، برقرار می‌سازد که عموماً با پیش‌بینی تحول سیستم تحت شرایط مختلف میسر می‌گردد. امکان پیش‌بینی تحول یک سیستم با استفاده از روش مدل راه‌یابی به حل پاره‌ای از مسائل کم و بیش پیچیده را ممکن ساخته است که با روشهای کلاسیک علوم تجربی کمتر قابل دسترسی می‌باشد.

در خاتمه بیان چند نکته ضروری است، به کارگیری روش مدل پیچیده و دارای جنبه‌های مختلفی است. از یک طرف در مرحله تعیین مشخصات سیستم و واسنجی مدل یک نوع مکاشفه یا به عبارت دیگر یک نوع استدلال تجربی نه چندان علمی ضرورت پیدا می‌کند که بستگی به تجربیات و دانش سازنده مدل دارد در صورتیکه این استدلال بدرستی انجام نگیرد می‌تواند در مرحله بهره‌برداری از مدل به نتیجه‌گیری اشتباه منجر گردد. از طرف دیگر روش مدل ایجاب می‌کند فیزیک پدیده مورد بررسی به خوبی شناخته شده باشد هر چند که به طور مستقیم مورد استفاده قرار نگیرد.

بالاخره آنچه که در مدل اهمیت اساسی دارد نتایج کاربردی و عملی آن است به عبارت دیگر هدف اصلی مدل پرده‌برداری از روی حقایق به منشور توصیف و طبقه‌بندی بهتر و شناخت بیشتر آنها نیست، بلکه آنچه مهم است رفتار یک سیستم حقیقی و نمایش هرچه درست‌تر آن است.

بنابراین رجوع به مدل یک نوع میان‌بر زدن بدون شناخت و معرفت یک سیستم طبیعی است که به منظور دستیابی آسان به نتایج عملی و کاربردی صورت می‌گیرد. این سهولت دسترسی به نتایج عملی و کاربردی حاصل نمی‌گردد مگر با پذیرش پاره‌ای از خطاها و تقریبها که جزء جداناپذیر مدل است.

منابع

۱- میراب‌زاده، م. سیستم‌ها و مدل‌ها. جزوه کلاسی

۲- میراب‌زاده، م. مدل‌های ریاضی آب زیرزمینی. جزوه درسی

3- Kovarik, K. 2000. “Numerical models in groundwater pollution” . Springer Pub.

4- Spitz, K., Moreno,J. 1996. “A Practical Guide to Groundwater and Solute Transport Modeling”. Wiley Pub.

5- Zheng, Ch., Bennett, G.D. 2002. “Applied Contaminant Transport Modeling”, 2nd Edition” . Wiley Pub.

6- Wikipedia Site. “Mathematical model”. http://en.wikipedia.org

7- http://www.introducingmathematics.com/mathematicalmodelling/01.html, “Mathematical Modeling”