کارگاه آموزشی مدلسازی در آبیاری و زهکشی
۲۴ آذر ماه ۱۳۸۴

مقدمه‌ای بر روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل

افشین اشرف‌زاده [۱]

مقدمه

بررسی قوانین فیزیکی حاکم بر بسیاری از مسایل عملی مهندسی به معادلاتی ریاضی منتهی می‌شود که قادرند رفتار یک فرآیند طبیعی را شبیه‌سازی کنند. این معادلات در بیشتر موارد معادلاتی دیفرانسیل می‌باشند که از آنها تحت عنوان معادلات حاکم[۲] نیز نام برده می‌شود. حل تحلیلی[۳] معادلات حاکم یا بسیار دشوار و تنها در شرایطی خاص امکان پذیر است و یا اینکه اصولا این معادلات دارای حل تحلیلی نیستند. در سال‌های اخیر با پیشرفت رایانه‌ها و امکان انجام محاسبات بسیار زیاد در مدت زمان‌های بسیار کوتاه، حل عددی[۴] معادلات دیفرانسل حاکم بر پدیده‌های طبیعی با اقبال زیادی مواجه شده است. با وجودی که بررسی مبانی نظری روش‌های عددی حل معادلات جبری یا دیفرانسیل دارای سابقه‌ای طولانی است، اما به عمل در آوردن این روش‌ها به دلیل حجم بسیار بالای محاسبات، مستلزم استفاده از ماشین‌های محاسب دارای سرعت‌های بالا می‌باشد. حل عددی معادلات دیفرانسیل پیوسته مستلزم انجام مراحل زیر است:

۱- تعریف میدان حل و انتخاب شبکهٔ مناسب

۲- تعیین شرایط اولیه و مرزی

۳- منفصل کردن[۵] معادلات دیفرانسیل پیوسته

۴- تشکیل دستگاه معادلات جبری

۵- حل دستگاه معادلات جبری تشکیل شده

۱- استادیار گروه مهندسی آب دانشگاه گیلان

2. governing equations
3. analytical solution
4. numerical solution
5. discretization equations

معادلات منفصل را می‌توان به روش‌های گوناگون به دست آورد که در اینجا به دو روش تفاضل‌های محدود[1] و حجم‌های محدود[2] اشاره می‌شود.

روش تفاضل‌های محدود برای منفصل کردن معادلات دیفرانسیل پیوسته

روش تفاضل‌های محدود مبتنی بر به دست آوردن یک چند جمله‌ای از درجهٔ n است که از $n+1$ نقطهٔ منفصل $[x_i, f_i]$ عبور می‌کند. این چندجمله‌ای که با $P_n(x)$ نمایش داده می‌شود تقریبی است از تابعی مانند $f(x)$ که این تابع نیز به نوبهٔ خود بیان کنندهٔ چگونگی تغییرات کمیتی خاص در جهت x است. در صورتی که $f(x)$ با $P_n(x)$ تقریب زده شود می‌توان با استفاده از این چند جمله‌ای، در xهایی که مقدار f در آنها موجود نیست برآوردی از کمیت مورد نظر به دست آورد. همچنین می‌توان مشتق مرتبهٔ اول یا مراتب بالاتر $f(x)$ را نیز برآورد کرد. می‌دانیم که از $n+1$ نقطهٔ منفصل مانند $[x_0, f_0]$، $[x_1, f_1]$، ... و $[x_n, f_n]$ فقط و فقط یک چند جمله‌ای از درجهٔ n می‌گذرد. فرم نیوتنی این چند جمله‌ای به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) \qquad (۱)$$

که در آن، b_0 تا b_n ضرایب ثابتی می‌باشند که با استفاده از نقاط منفصل $[x_i, f_i]$ به دست می‌آیند. با جایگذاری اولین نقطه، $[x_0, f_0]$، در $P_n(x)$ خواهیم داشت:

$$b_0 = f_0 \qquad (۲)$$

و با جایگذاری $[x_1, f_1]$ در $P_n(x)$:

$$b_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \qquad (۳)$$

و به همین ترتیب با جایگذاری $[x_2, f_2]$ در $P_n(x)$ و ساده کردن رابطهٔ حاصل می‌توان b_2 را به صورت زیر به دست آورد:

$$b_2 = \frac{\dfrac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \qquad (۴)$$

1. finite differences
2. finite volumes

$\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}$ و $\frac{\frac{f_2-f_1}{x_2-x_1}-\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}$ به ترتیب تفاضل تقسیمی اول[1] و تفاضل تقسیمی دوم[2] نامیده می‌شوند و با $f[x_1,x_0]$ و $f[x_2,x_1,x_0]$ نمایش داده می‌شوند:

$$f[x_1,x_0]=\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0} \tag{۵}$$

$$f[x_2,x_1,x_0]=\frac{\frac{f_2-f_1}{x_2-x_1}-\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}=\frac{f[x_2,x_1]-f[x_1,x_0]}{x_2-x_0} \tag{۶}$$

به سادگی می‌توان ثابت کرد که:

$$f[x_1,x_0]=f[x_0,x_1] \tag{۷}$$

و همچنین:

$$f[x_2,x_1,x_0]=f[x_0,x_1,x_2] \tag{۸}$$

بنابراین می‌توان $P_n(x)$ را با استفاده از نمادهای تعریف شده برای تفاضل‌های تقسیمی به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}P_n(x)=f_0+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+...\\+f[x_0,x_1,...,x_n](x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})\end{aligned} \tag{۹}$$

در صورتی که فرض شود نقاط منفصل $[x_0,f_0]$، $[x_1,f_1]$، ... و $[x_n,f_n]$ به ترتیب xها مرتب شده‌اند و علاوه بر این، اختلاف بین هر دو x متوالی نیز مقداری ثابت و برابر با h است با شکلی خاص از تفاضل‌های تقسیمی رو به رو هستیم که تفاضل‌های محدود نامیده می‌شوند. تفاضل‌های محدود را می‌توان با استفاده از عملگرهای[3] Δ، ∇ و δ به صورت‌های زیر نوشت:

---

1. first divided difference
2. second divided difference
3. operators

الف- عمل‌گر Δ،

$$f[x_0,x_1]=\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}=\frac{1}{h}(f_1-f_0)=\frac{1}{h}\Delta f_0 \qquad (۱۰)$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{2h}=\frac{1}{2h^2}(\Delta f_1-\Delta f_0)=\frac{1}{2h^2}\Delta^2 f_0 \qquad (۱۱)$$

و در حالت کلی:

$$f[x_0,x_1,x_2,...,x_n]=\frac{1}{n!h^n}\Delta^n f_0 \qquad (۱۲)$$

Δf_0 تفاضل رو به جلوی اول[۱] و $\Delta^2 f_0$ تفاضل رو به جلوی دوم[۲] نامیده می‌شود. در صورتی که نقاط منفصل را به ترتیب از اولین نقطه با $[x_i,f_i]$، $[x_{i+1},f_{i+1}]$، ... و $[x_{i+n},f_{i+n}]$ نمایش دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}P_n(x)=f_i+\frac{\Delta f_i}{h}(x-x_i)+\frac{\Delta^2 f_i}{2!h^2}(x-x_i)(x-x_{i+1})+...\\ +\frac{\Delta^n f_i}{n!h^n}(x-x_i)(x-x_{i+1})...(x-x_{i+n-1})\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

رابطهٔ (۱۳)، فرمول نیوتن-گریگوری رو به جلو[۳] برای تقریب $f(x)$ نامیده می‌شود. با استفاده از این فرمول می‌توان مشتق مرتبهٔ اول و مراتب بالاتر $f(x)$ در نقطهٔ x_i را به کمک نقاطی که بعد از x_i واقع شده‌اند تقریب کرد. به عنوان مثال تقریب درجه دو برای مشتق مرتبهٔ اول $f(x)$ را به کمک رابطهٔ (۱۳) می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{cases} f(x)\approx P_2(x)=f_i+\frac{\Delta f_i}{h}(x-x_i)+\frac{\Delta^2 f_i}{2!h^2}(x-x_i)(x-x_{i+1})\Rightarrow \\ \frac{df}{dx}=\frac{\Delta f_i}{h}+\frac{\Delta^2 f_i}{h^2}x-\frac{\Delta^2 f_i}{2!h^2}(x_i+x_{i+1})\Rightarrow \\ \left.\frac{df}{dx}\right|_i=\frac{\Delta f_i}{h}+\frac{\Delta^2 f_i}{h^2}x_i-\frac{\Delta^2 f_i}{2!h^2}(x_i+x_{i+1})\Rightarrow \\ \left.\frac{df}{dx}\right|_i=\frac{\Delta f_i}{h}+\frac{\Delta^2 f_i}{2h^2}(x_i-x_{i+1})=\frac{f_{i+1}-f_i}{h}-\frac{f_{i+2}-f_{i+1}-(f_{i+1}-f_i)}{2h}\Rightarrow \\ \left.\frac{df}{dx}\right|_i=\frac{4f_{i+1}-3f_i-f_{i+2}}{2h} \end{cases} \qquad (۱۴)$$

1. first forward difference
2. second forward difference
3. Newton-Gregory forward formula

ب- عمل‌گر ∇،

$$f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{1}{h}(f_1 - f_0) = \frac{1}{h}\nabla f_0 \tag{۱۵}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{2h} = \frac{1}{2h^2}(\nabla f_1 - \nabla f_0) = \frac{1}{2h^2}\nabla^2 f_0 \tag{۱۶}$$

و در حالت کلی:

$$f[x_0, x_1, x_2, ..., x_n] = \frac{1}{n!h^n}\nabla^n f_0 \tag{۱۷}$$

∇f_0 تفاضل رو به عقب اول[1] و $\nabla^2 f_0$ تفاضل رو به عقب دوم[2] نامیده می‌شود. در صورتی که نقاط منفصل را به ترتیب از آخرین نقطه با $[x_i, f_i]$، $[x_{i-1}, f_{i-1}]$، ... و $[x_{i-n}, f_{i-n}]$ نمایش دهیم خواهیم داشت ($[x_{i-n}, f_{i-n}]$ اولین نقطه و $[x_i, f_i]$ آخرین آنها باشد):

$$\begin{aligned} P_n(x) = f_i + \frac{\nabla f_i}{h}(x - x_i) + \frac{\nabla^2 f_i}{2!h^2}(x - x_i)(x - x_{i-1}) + ... \\ + \frac{\nabla^n f_i}{n!h^n}(x - x_i)(x - x_{i-1})...(x - x_{i-n+1}) \end{aligned} \tag{۱۸}$$

رابطهٔ (۱۸) فرمول نیوتن-گریگوری رو به عقب[3] برای تقریب $f(x)$ نامیده می‌شود. با استفاده از این فرمول می‌توان مشتق مرتبهٔ اول و مراتب بالاتر $f(x)$ در نقطهٔ x_i را به کمک نقاطی که قبل از x_i واقع شده‌اند تقریب کرد.

ج- عمل‌گر δ،

$$f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{1}{h}(f_1 - f_0) = \frac{1}{h}\delta f_{1/2} \tag{۱۹}$$

$$f[x_{-1}, x_0] = \frac{f_0 - f_{-1}}{x_0 - x_{-1}} = \frac{1}{h}(f_0 - f_{-1}) = \frac{1}{h}\delta f_{-1/2} \tag{۲۰}$$

1. first backward difference
2. second backward difference
3. Newton-Gregory backward formula

$$f[x_{-1},x_0,x_1]=\frac{f[x_0,x_1]-f[x_{-1},x_0]}{2h}=\frac{1}{2h^2}(\delta f_{1/2}-\delta f_{-1/2})=\frac{1}{2h^2}\delta^2 f_0 \qquad (۲۱)$$

در حالت کلی در صورتی که تعداد نقاط منفصل برابر با 2n+1 باشد:

$$f[x_{i-n},...,x_i,...,x_{i+n}]=\frac{1}{(2n)!h^{2n}}\delta^{2n}f_i \qquad (۲۲)$$

و در صورتی که تعداد نقاط منفصل برابر با 2n باشد:

$$f[x_{i-n},...,x_i,...,x_{i+n},x_{i+n+1}]=\frac{1}{(2n+1)!h^{2n+1}}\delta^{2n+1}f_{i+1/2} \qquad (۲۳)$$

$\delta f_{1/2}$ (و یا $\delta f_{-1/2}$) تفاضل مرکزی اول[1] و $\delta^2 f_0$ تفاضل مرکزی دوم[2] نامیده می‌شود. با استفاده از عملگر δ تقریب f(x) به صورت‌های زیر نوشته می‌شود (رابطهٔ اول برای 2n+1 نقطه و رابطهٔ دوم برای 2n نقطه):

$$\begin{aligned}P_{2n}(x)=f_i+\frac{\delta f_{i+1/2}}{h}(x-x_i)+\frac{\delta^2 f_i}{2!h^2}(x-x_i)(x-x_{i+1})+...\\+\frac{\delta^{2n}f_i}{(2n)!h^{2n}}(x-x_i)(x-x_{i+1})(x-x_{i-1})...(x-x_{i+n})\end{aligned} \qquad (۲۴)$$

(۲۵)

$$\begin{aligned}P_{2n-1}(x)=f_i+\frac{\delta f_{i+1/2}}{h}(x-x_i)+\frac{\delta^2 f_i}{2!h^2}(x-x_i)(x-x_{i+1})+...\\+\frac{1}{(2n+1)!h^{2n+1}}\delta^{2n+1}f_{i+1/2}(x-x_i)(x-x_{i+1})(x-x_{i-1})...(x-x_{i-n+1})\end{aligned}$$

رابطهٔ (۲۴) (و یا رابطهٔ (۲۵)) فرمول گاوس رو به جلو[3] برای تقریب f(x) نامیده می‌شود. با استفاده از این فرمول می‌توان مشتق مرتبهٔ اول و مراتب بالاتر f(x) در نقطهٔ x_i را به کمک نقاطی که قبل و بعد از x_i واقع شده‌اند تقریب کرد. به عنوان مثال، تقریب درجه دو برای مشتق‌های مرتبهٔ اول و دوم f(x) را به کمک رابطهٔ (۲۴) می‌توان به صورت زیر به دست آورد(n=1):

1. first central difference
2. second central difference
3. Gauss forward formula

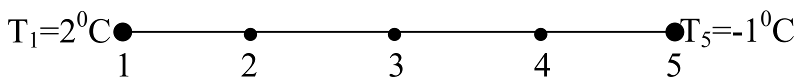
$$\left\{\begin{array}{l} f(x)\approx P_2(x)=f_i+\dfrac{\delta f_{i+1/2}}{h}(x-x_i)+\dfrac{\delta^2 f_i}{2!h^2}(x-x_i)(x-x_{i+1})\Rightarrow \\ \dfrac{df}{dx}=\dfrac{\delta f_{i+1/2}}{h}+\dfrac{\delta^2 f_i}{h^2}x-\dfrac{\delta^2 f_i}{2!h^2}(x_i+x_{i+1})\Rightarrow \\ \left.\dfrac{df}{dx}\right|_i=\dfrac{\delta f_{i+1/2}}{h}+\dfrac{\delta^2 f_i}{h^2}x_i-\dfrac{\delta^2 f_i}{2!h^2}(x_i+x_{i+1})\Rightarrow \\ \left.\dfrac{df}{dx}\right|_i=\dfrac{\delta f_{i+1/2}}{h}+\dfrac{\delta^2 f_i}{2!h^2}(x_i-x_{i+1})\Rightarrow \\ \left.\dfrac{df}{dx}\right|_i=\dfrac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2h} \end{array}\right. \qquad (۲۶)$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)\approx P_2(x)=f_i+\dfrac{\delta f_{i+1/2}}{h}(x-x_i)+\dfrac{\delta^2 f_i}{2!h^2}(x-x_i)(x-x_{i+1})\Rightarrow \\ \dfrac{d^2f}{dx^2}=\dfrac{\delta^2 f_i}{h^2}\Rightarrow \\ \left.\dfrac{d^2f}{dx^2}\right|_i=\dfrac{\delta^2 f_i}{h^2}\Rightarrow \\ \left.\dfrac{d^2f}{dx^2}\right|_i=\dfrac{f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}}{h^2} \end{array}\right. \qquad (۲۷)$$

با توجه به آنچه گفته شد معادلهٔ منفصل را می‌توان با جایگزین کردن تقریب‌های به دست آمده از فرمول‌های نیوتن-گریگوری رو به جلو، نیوتن-گریگوری رو به عقب و یا گاوس رو به جلو با شکل پیوستهٔ مشتق‌های مرتبهٔ اول یا مراتب بالاتر موجود در معادلهٔ دیفرانسیل به دست آورد و نسبت به حل عددی معادلهٔ دیفرانسیل مورد نظر اقدام نمود. به عنوان نمونه فرض کنیم معادلهٔ حاکم بر انتقال درجه حرارت در یک میلهٔ فلزی به شکل زیر باشد:

$$\frac{d^2T}{dx^2}=x(1-\frac{T}{5}) \qquad (۲۸)$$

که در آن، T درجه حرارت در نقطهٔ x است. به منظور حل عددی این معادلهٔ دیفرانسیل بایستی ابتدا میدان حل، شبکهٔ مناسب و شرایط اولیه و مرزی را تعیین کنیم. فرض کنیم که شبکهٔ انتخاب شده برای میدان حل و شرایط مرزی مطابق با شکل زیر است (از آنجا که در معادلهٔ حاکم، تغییرات درجه حرارت نسبت به زمان موجود نیست بنابراین لزومی به در نظر گرفتن شرط اولیه نمی‌باشد):



شکل (۱): میدان حل، شبکه‌بندی و شرایط مرزی در میلهٔ فلزی

در شبکهٔ ارائه شده در شکل (۱) پنج نقطهٔ منفصل در نظر گرفته شده است. فاصلهٔ هر دو نقطهٔ متوالی از یکدیگر برابر با 0.5 واحد در نظر گرفته شده است. دو نقطه از این پنج نقطه دارای درجه حرارت مشخص می‌باشند و شرایط مرزی مسئله را تعریف می‌کنند. هدف، به دست آوردن درجه حرارت در نقاط میانی میله با استفاده از حل عددی معادلهٔ حاکم به روش تفاضل‌های محدود است. ار آنجا که درجه حرارت در هر کدام از نقاط میانی به دو نقطهٔ همجوار آن وابسته است از فرمول گاوس رو به جلو برای تقریب مشتق مرتبهٔ دوم موجود در معادلهٔ دیفرانسیل استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2T}{dx^2} = x(1-\dfrac{T}{5}) \Rightarrow \\ \dfrac{T_{i+1}-2T_i+T_{i-1}}{2h} = x_i(1-\dfrac{T_i}{5}) \end{cases} \tag{۲۹}$$

معادلهٔ به دست آمده، شکل منفصل شدهٔ معادلهٔ دیفرانسیل پیوسته است. این معادله را بر روی نقاط دو تا چهار اعمال می‌کنیم:

$$\begin{cases} i=2 \Rightarrow \dfrac{T_3-2T_2+T_1}{0.5^2} = 0.5(1-\dfrac{T_2}{5}) \Rightarrow 2-1.975T_2+T_3 = 0.125 \\ i=3 \Rightarrow \dfrac{T_4-2T_3+T_2}{0.5^2} = 1(1-\dfrac{T_3}{5}) \Rightarrow T_2-1.95T_3+T_4 = 0.25 \\ i=4 \Rightarrow \dfrac{T_5-2T_4+T_3}{0.5^2} = 1.5(1-\dfrac{T_4}{5}) \Rightarrow T_3-1.925T_4-1 = 0.375 \end{cases} \tag{۳۰}$$

دستگاه معادلات جبری حاصل دارای سه معادله و سه مجهول است که با حل آن می‌توان مقدار درجه حرارات در نقاط دو تا چهار را به دست آورد.

نگرش حجم کنترل در منفصل کردن معادلات دیفرانسیل پیوسته

در روش حجم‌های محدود، معادلات منفصل با استفاده از مفهوم حجم کنترل[1] به‌دست می‌آیند. به‌دست آوردن معادلات منفصل با استفاده از مفهوم حجم کنترل شامل مراحل زیر است:

۱- قرار دادن شبکه‌ای مناسب بر روی میدان حل.

۲- در نظر گرفتن یک حجم کنترل برای هر کدام از گره‌های موجود در شبکه. این حجم‌های کنترل بایستی فاقد هم‌پوشانی و دارای مرزهای مشترک باشند.

1. control volume (C.V.)

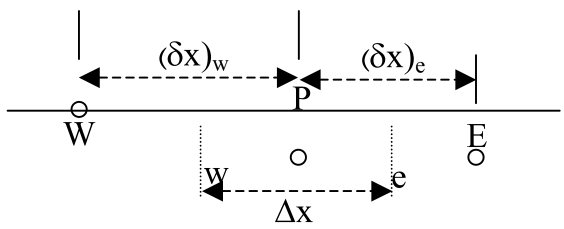
۳- انتگرال‌گیری از معادلهٔ دیفرانسیل مورد نظر بر روی هر کدام از حجم‌های کنترل. محاسبهٔ انتگرال‌های نوشته شده مستلزم در نظر گرفتن فرض‌هایی در مورد چگونگی تغییرات متغیر مستقل در بین گره‌های شبکهٔ در نظر گرفته شده است.

معادلات منفصلی که بدین ترتیب به‌دست می‌آیند بیان‌کنندهٔ اصل بقای کمیتی مانند Φ در یک حجم کنترل محدود می‌باشند (شکل ماکروسکوپیک)، این در حالی است که معادلهٔ دیفرانسیل پیوسته اصل یاد شده را در یک حجم کنترل بسیار کوچک بیان می‌کند (شکل میکروسکوپیک).

به منظور شرح بیشتر روش، معادلهٔ منفصل را برای یک معادلهٔ دیفرانسیل ساده به‌دست می‌آوریم. ساده‌ترین معادلهٔ دیفرانسیل یک‌بعدی حاکم بر انتقال حرارت[1] را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)+S=0 \qquad (۳۱)$$

که در آن، k هدایت حرارتی[2]، T درجه حرارت و S نرخ تولید حرارت در واحد حجم است. S، جملهٔ منبع[3] نیز نامیده می‌شود. معادلهٔ فوق یک معادلهٔ پخشودگی[4] پایدار[5] در حالت یک‌بعدی است. به منظور به‌دست آوردن معادلهٔ منفصل از میدان حلی استفاده می‌کنیم که بخشی از آن در شکل (۱) نمایش داده شده است. این میدان حل را می‌توان میله‌ای فلزی فرض کرد که دو نقطهٔ انتهایی آن دارای درجه حرارتی مشخص است. گره‌ای که می‌خواهیم معادلهٔ منفصل مربوط به آن را به‌دست آوریم با P نمایش داده شده است. گره‌های مجاور گرهٔ P نیز با W و E نمایش داده شده‌اند که به ترتیب معرف گره‌های واقع در غرب و شرق گرهٔ P می‌باشند. محل استقرار وجه‌های[6] حجم کنترل قرار داده شده بر روی گرهٔP با w و e نمایش داده شده است.



شکل (۲): علائم مورد استفاده در به‌دست آوردن معادلهٔ منفصل در نگرش حجم کنترل

1. heat conduction
2. thermal conductivity
3. source term
4. diffusion
5. steady
6. faces

اکنون از معادلهٔ دیفرانسیل حاکم، بر روی حجم کنترل نمایش داده شده در شکل (۱) انتگرال‌گیری می‌کنیم:

$$\int_w^e \frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)dx + \int_w^e S\,dx = 0 \tag{۳۲}$$

و به عبارت دیگر:

$$\left(k\frac{dT}{dx}\right)_e - \left(k\frac{dT}{dx}\right)_w + \int_w^e S\,dx = 0 \tag{۳۳}$$

جملات معادلهٔ فوق به ترتیب بیانگر شار حرارتی[1] خروجی از حجم کنترل، شار حرارتی ورودی به حجم کنترل و تغییرات حرارت در داخل حجم کنترل می‌باشند. به عبارت دیگر معادلهٔ فوق بیان‌کنندهٔ قانون بقای انرژی در شکل ماکروسکوپیک است. یادآوری می‌شود که معادلهٔ دیفرانسیل پیوسته، قانون بقای انرژی را در شکل میکروسکوپیک بیان می‌کند.

در صورتی که تغییرات T بین هر دو گرهٔ متوالی را خطی فرض کنیم[2] معادلهٔ (۳۳) به شکل زیر نوشته خواهد شد:

$$k_e \frac{T_E - T_P}{(\delta x)_e} - k_w \frac{T_P - T_W}{(\delta x)_w} + \bar{S}\Delta x = 0 \tag{۳۴}$$

که در آن، $\bar{S}$ میانگینی از S در درون حجم کنترل است. این معادلهٔ منفصل را می‌توان به شکل زیر نوشت که شکلی متداول برای معادلات منفصل به‌دست آمده با استفاده از مفهوم حجم کنترل است:

$$a_p T_p = a_E T_E + a_W T_W + b \tag{۳۵}$$

که در آن،

$$a_E = \frac{k_e}{(\delta x)_e} \tag{۳۵-الف}$$

$$a_W = \frac{k_w}{(\delta x)_w} \tag{۳۵-ب}$$

$$a_P = a_E + a_W \tag{۳۵-ج}$$

$$b = \bar{S}\Delta x \tag{۳۵-د}$$

---

1. heat flux

۲- این تغییرات را می‌توان غیر خطی نیز در نظر گرفت.

معادلهٔ (۳۵) در برخی موارد به شکل زیر نیز نوشته می‌شود:

$$a_p T_p = \sum a_{nb} T_{nb} + b \qquad (۳۶)$$

که در آن، زیرنویس nb به معنای همسایه‌های[1] گرهٔ P است.
نکته‌ای که ذکر آن در مورد معادلهٔ (۳۴) ضروری به نظر می‌رسد این است که در بسیاری از مواقع، S تابعی از متغیر وابسته (در این مثال، T) است. در صورتی که S تابعی خطی از متغیر مستقل باشد توصیه می‌شود که $\overline{S}$ به شکل زیر بیان شود:

$$\overline{S} = S_c + S_p T_p \qquad (۳۷)$$

در معادلهٔ فوق، S_c بیان‌کنندهٔ بخش ثابت $\overline{S}$ و S_p ضریبی است که وابستگی $\overline{S}$ را به T_p بیان می‌کند. در صورت استفاده از معادلهٔ (۳۷)، a_P و b در معادلهٔ (۳۵) به شکل زیر نوشته خواهند شد:

$$a_P = a_E + a_W - S_p \Delta x \qquad (\text{۳۸-الف})$$

$$b = \overline{S}_c \Delta x \qquad (\text{۳۸-ب})$$

با نوشتن معادلهٔ منفصل برای تمامی گره‌های واقع در میدان حل، دستگاهی از معادلاتی جبری حاصل می‌شود که حل آن، مقدار متغیر مستقل در هر کدام از گره‌های شبکه را به‌دست خواهد داد.
معادلهٔ دیفرانسیلی که در مورد آن بحث شد، معادله‌ای پایدار است که تغییرات متغیر مستقل نسبت به زمان را شامل نمی‌شود. به منظور بیان نحوهٔ به‌دست آوردن معادلات منفصل در حالتی که معادلهٔ دیفرانسیل پیوسته معادله‌ای ناپایدار است از معادلهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) \qquad (۳۹)$$

که در آن، ρc مقداری ثابت است. معادلهٔ فوق یک معادلهٔ پخشودگی ناپایدار در حالت یک‌بعدی است. با استفاده از شبکهٔ ارائه شده در شکل (۱) و انتگرال‌گیری از معادلهٔ فوق بر روی حجم کنترل مورد نظر و از زمان t تا $t+\Delta t$ خواهیم داشت:

$$\rho c \int_w^e \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t} dt dx + \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) dx dt = 0 \qquad (۴۰)$$

---

1. neighbors

انتگرال‌گیری در بازهٔ زمانی مورد نظر را به صورت زیر انجام می‌دهیم:

$$\int_{t}^{t+\Delta t} T_P dt = f\,T_P^n + (1-f)T_P^o \qquad (۴۱)$$

در این معادله، f ضریبی بین صفر تا یک و مشخص کنندهٔ نحوهٔ تغییرات T_P در بازهٔ زمانی در نظر گرفته شده است. بالانویس‌های n و o نیز به ترتیب نشان دهندهٔ مقدار متغیر مستقل در زمان‌های جدید و قدیم می‌باشند. بدین ترتیب پس از انجام محاسبات مورد نیاز خواهیم داشت:

$$a_p T_p^o = a_E\left[f\,T_E + (1-f)T_E^o\right] + a_W\left[f\,T_W + (1-f)T_W^o\right] + \left[a_P^o - (1-f)a_E - (1-f)a_W\right] \qquad (۴۲)$$

که در آن،

$$a_E = \frac{k_e}{(\delta x)_e} \qquad (\text{۴۲-الف})$$

$$a_W = \frac{k_w}{(\delta x)_w} \qquad (\text{۴۲-ب})$$

$$a_P^o = \frac{\rho c \Delta x}{\Delta t} \qquad (\text{۴۲-ب})$$

$$a_P = f a_E + f a_W + a_P^o \qquad (\text{۴۲-ج})$$

انتخاب مقدار صفر برای f معادل با استفاده از روش صریح (عدم وابستگی متغیر مستقل در زمان جدید به مقدار آن در زمان قدیم و در نتیجه عدم نیاز به حل دستگاه معادلات) و انتخاب مقدار یک برای آن به معنی استفاده از روش ضمنی است. در صورت استفاده از روش صریح لازم است که مقدار گام زمانی (Δt) در نامعادلهٔ زیر صدق کند:

$$\Delta t < \frac{\rho c (\Delta x)^2}{2k} \qquad (۴۳)$$

شرط فوق، شرط پایداری روش صریح نامیده می‌شود.
معادلات دیفرانسیل حاکم بر انتقال یک سیال ممکن است به طور همزمان جملات مربوط به پخشودگی و همرفت[1] را به همراه داشته باشند. با توجه به اهمیت این دسته از معادلات، نحوهٔ به‌دست آوردن معادلات

1. convection

منفصل مربوط به آنها را بیان می‌کنیم. یک معادلهٔ پخشودگی و همرفت پایدار در حالت یک‌بعدی را می‌توان به شکل کلی زیر بیان کرد:

$$\frac{d}{dx}(\rho u\Phi) = \frac{d}{dx}(\Gamma\frac{d\Phi}{dx}) \tag{۴۴}$$

در این معادله، ρ و Γ ویژگی‌های سیال مورد نظر، u سرعت سیال در جهت x و Φ جرم و یا مومنتم است. مجددا با استفاده از علائم به کار رفته در شکل (۲) و انتگرال‌گیری از معادلهٔ فوق بر روی حجم کنترل مورد نظر خواهیم داشت:

$$\int_w^e \frac{d}{dx}(\rho u\Phi) = \int_w^e \frac{d}{dx}(\Gamma\frac{d\Phi}{dx}) \tag{۴۵}$$

$$(\rho u\varphi)_e - (\rho u\varphi)_w = (\Gamma\frac{d\varphi}{dx})_e - (\Gamma\frac{d\varphi}{dx})_w \tag{۴۶}$$

و با در نظر گرفتن:

$$\varphi_e = \frac{\varphi_E + \varphi_P}{2} \tag{۴۷}$$

$$\varphi_w = \frac{\varphi_W + \varphi_P}{2} \tag{۴۸}$$

خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}(\rho u)_e(\varphi_E + \varphi_P) - \frac{1}{2}(\rho u)_w(\varphi_P + \varphi_W) = \Gamma_e\frac{\varphi_E - \varphi_P}{(\delta x)_e} - \Gamma_w\frac{\varphi_P - \varphi_W}{(\delta x)_w} \tag{۴۹}$$

قدرت همرفت و پخشودگی به ترتیب به وسیلهٔ $F = \rho u$ و $D = \frac{\Gamma}{\delta x}$ مشخص می‌شود.D همواره مقداری مثبت دارد اما F بسته به جهت جریان می‌تواند مثبت و یا منفی باشد. بدین ترتیب با استفاده از این تعاریف خواهیم داشت:

$$a_p\varphi_p = a_E\varphi_E + a_W\varphi_W \tag{۵۰}$$

که در آن،

$$a_E = D_e - \frac{F_e}{2} \tag{۵۰-الف}$$

$$a_W = D_w - \frac{F_w}{2} \quad (۵۰\text{-ب})$$

$$a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w) \quad (۵۰\text{-ج})$$

جواب‌های به‌دست آمده با استفاده از روش فوق در صورتی مقادیری فیزیکی خواهند بود که ضرایب گره‌های مجاور با گرهٔ P مقادیری مثبت باشند. به عبارت دیگر شرایط زیر بایستی به طور همزمان برقرار باشند:

$$\begin{cases} \dfrac{a_E}{D_e} = 1 - \dfrac{F_e / D_e}{2} \geq 0 \\ \dfrac{a_W}{D_w} = 1 + \dfrac{F_w / D_w}{2} \geq 0 \end{cases} \quad (۵۱)$$

به عبارت دیگر:

$$\frac{F}{D} = P_e \leq \frac{1}{2} \quad (۵۲)$$

نسبت $\frac{F}{D}$ عدد پیکلت[1] (P_e) نامیده می‌شود. با رعایت شرط فوق جواب‌های حاصل، جواب‌هایی منطبق با فیزیک مسئله خواهند بود.

روش‌های حل دستگاه معادلات جبری

پس از تشکیل معادلهٔ منفصل و اعمال این معادله بر روی نقاط موجود در شبکه، دستگاهی از معادلات جبری حاصل می‌شود که این دستگاه را بایستی به طریقی حل نمود. از آنجا که در مسائل عملی، تعداد نقاط شبکه بسیار زیاد است ابعاد دستگاه معادلات جبری حاصل نیز بسیار بزرگ خواهد بود و این امر باعث می‌شود حل این دستگاه با استفاده از روش‌های مستقیمی مانند روش عکس ماتریس امکان پذیر نباشد. بنابراین در عمل از روش‌های مستقیم دیگری مانند روش حذف گاوس[2] و یا TDMA و همچنین روش‌های تکراری مانند روش جاکوبی[3] یا گاوس جوردن[4] برای حل دستگاه معادلات استفاده می‌شود.

1. Peclet number
2. Gauss elimination
3. Jacobi
4. Gauss Jordan

منابع

1- Gerald, C. F. and P.O. Wheatley, Applied Numerical Analysis, 6th Edition, Addison-Wesley, New York, 1997.
2- Patankar, S. V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Series in Comput. Meth. in Mechanics and Thermal Sciences, McGraw-Hill, New York, 1980.
3- Burden, R. L. and J. D. Faires, Numerical Analysis, 7th Edition, Brooks Cole, London, 2001.